Последовательности Zadoff-Chu (ZC)

Февраль 2026

Ляшев В.А.

lyashev.va@ict-lab.ru
https://ict-lab.ru/lyashev/

Basic definition

Последовательности, **периодическая автокорреляционная функция которых равна нулю везде, кроме точки нулевой задержки**, играют фундаментальную роль в ряде приложений, таких как

- синхронизация,
- широкополосная передача сигналов,
- случайный множественный доступ,
- зондирование.

Известно, что дискретный спектр последовательности ZC простой длины – тоже является последовательностью ZC, масштабированной по амплитуде и времени, что снижает сложность вычислений до $\mathcal{O}(N_{ZC})$.

Конкретнее, вычисление ДПФ состоит из двух шагов, каждый из которых имеет сложность $\mathcal{O}(N_{ZC})$: сначала вычисляется коэффициент нулевой частоты ДПФ, а затем используется этот коэффициент для масштабирования новой последовательности ZC.

Zadoff-Chu sequence

Последовательность Задова — Чу (Zadoff-Chu sequence)

Что это:
Это комплексная математическая последовательность, которая обладает особыми свойствами (постоянная амплитуда и нулевая автокорреляция).

Применение:
Она критически важна для работы современных систем мобильной связи LTE (4G) и 5G. С её помощью мобильный телефон синхронизируется с базовой станцией.

Имена авторов:
Последовательность названа в честь Соломона Задова (Solomon Zadoff) и Дэвида Чу (David Chu).

В общем виде ZC-последовательность периода N_{ZC} с корнем u представляет собой

$$s_u(n) = e^{-i\pi u \frac{n+c+2q}{N_{ZC}}}, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

N_{ZC} - относительно простое число;
$1 \leq u \leq N_{ZC} - 1$;
$c \equiv N_{ZC} \bmod 2$ and q любое целое число.

Видно, что ZC-последовательность унимодулярна и периодична с периодом N_{ZC}.

Автокорреляционные свойства ZC

$$R_{uu}(\tau) = \sum_{n=0}^{N_{ZC}-1} s_u(n)s_u^*(n+\tau) = N_{ZC}\delta_{N_{ZC}|\tau}\,, \qquad \tau \in \mathbb{Z}$$

$$\delta_{N_{ZC}|\tau} = \begin{cases} 1, \tau \equiv 0 \pmod{N_{ZC}}; \\ 0, \tau \neq 0. \end{cases}$$ - кронекериан

Это идеальное свойство автокорреляции, наряду с унимодулярностью, классифицирует последовательности ZC как последовательности CAZAC (т.е. с нулевой автокорреляцией постоянной амплитуды).

Хотя кросс-корреляция между двумя последовательностями ZC с разными корнями и не равна нулю, но также ведет себя хорошо при достаточной длине, а именно:

$$|R_{uv}(\tau)| = \sum_{n=0}^{N_{ZC}-1} s_u(n)s_v^*(n+\tau) = \sqrt{N_{ZC}}$$

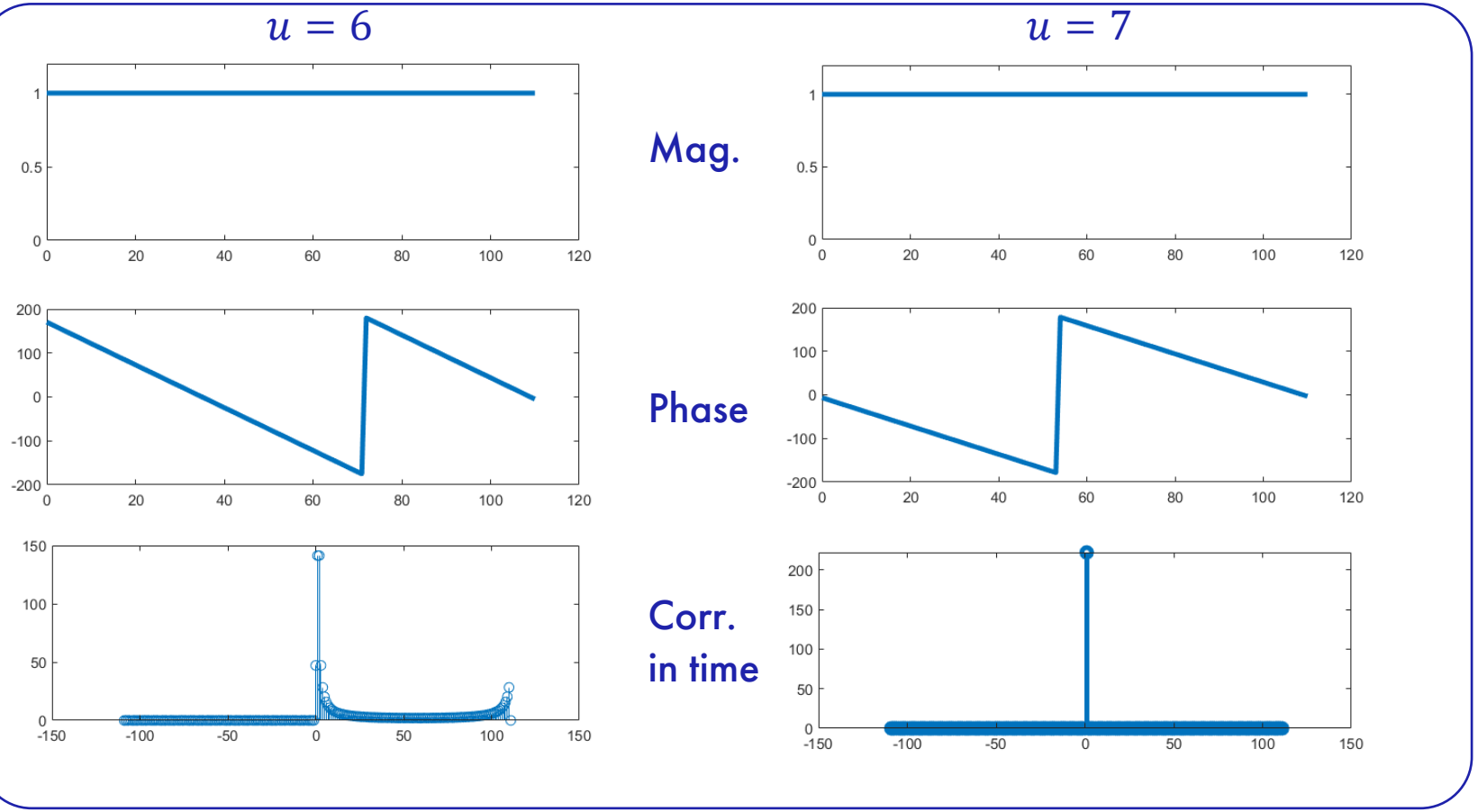
при условии, что $(u-v)$ взаимно простое с N_{ZC}.

Последовательности ZC нечётной простой длины обладают дополнительным свойством: их ДПФ (и обратное ДПФ) сами являются последовательностями ZC, масштабированными по амплитуде и времени. То есть,

$$S_u(k) = \sum_{n=0}^{N_{ZC}-1} s_u(n)e^{-i\frac{2\pi kn}{N_{ZC}}} = S_u(0)s^*_{u^{-1}\,k}(k)$$

u^{-1} — обратный элемент числа u по модулю N_{ZC}.

Правила выбора параметра u



$N_{ZC} = 111$ – разложим число на простые множители $111 = 3 \times 37$.
Значит u не должно иметь общих множителей с 3 и 37

{2,5,7,10,11,13,14,16,17,19,20,22,23,25,26,…}

$$s_u(n) = e^{-i\pi u \frac{n+c+2q}{N_{ZC}}}$$

Основные критерии правильного выбора параметра u при заданной длине последовательности N_{ZC}

- ✓ Взаимная простота с длиной последовательности

$$\text{НОД}(u, N_{ZC}) = 1$$

- ✓ Количество уникальных последовательностей

$\varphi(N_{ZC})$ – функция Эйлера, помогает определить кол-во уникальных последовательностей.

Задача

- Высокая скорость движения поездов приводит к возникновению значительных доплеровских частотных смещений, которые вызывают появление псевдокорреляционных пиков на приёмной стороне PRACH.

- Эти искажения отрицательно влияют на производительность процесса обнаружения преамбул, снижая вероятность успешного обнаружения и увеличивая вероятность ложных тревог.

Математическая постановка

Модель системы и особенности высокоскоростной среды

Принятый сигнал с эффектом Доплера

Доплеровский сдвиг частоты приводит к дополнительному фазовому сдвигу в принятом сигнале преамбулы. Математически принятый сигнал с учётом эффекта Доплера представляется следующим образом:

$$y_n(n) = s_u(n)e^{i2\pi f_D n T_{seq}} + w_n.$$

Корреляционная функция мощности служит основным инструментом для обнаружения преамбулы и оценивается по следующей формуле:

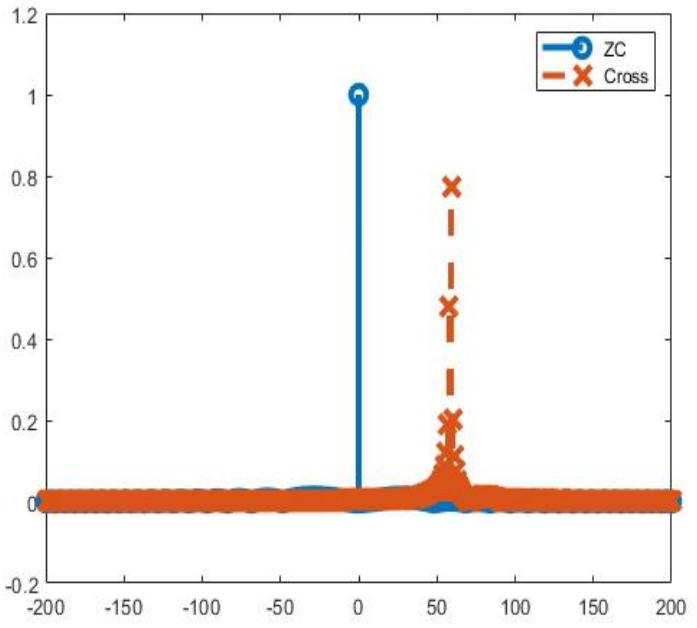
$$P_D(l) = \frac{1}{N_{ZC}} \sum_{n=0}^{N_{ZC}-1} |s_u^*(n+l)y_n|^2, \qquad 0 \le l \le N_{ZC} - 1.$$

Доплеровский сдвиг приводит к формированию ложных (псевдо-) корреляционных пиков в позиции:

$$d_u = \left\lfloor \frac{pN_{ZC}}{u} \right\rfloor,$$

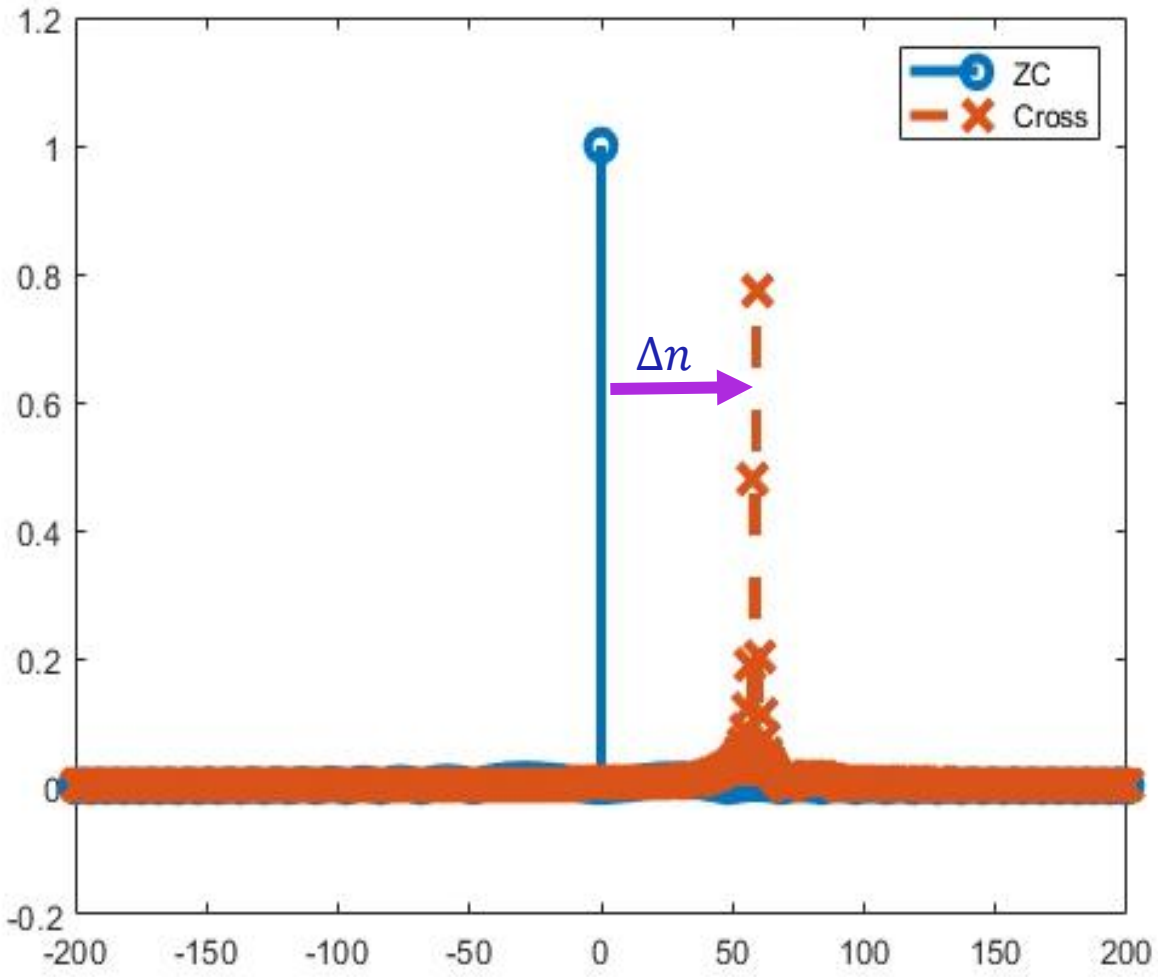
где p — минимальное неотрицательное целое число, удовлетворяющее условию $pu \bmod N_{ZC} = 1$.

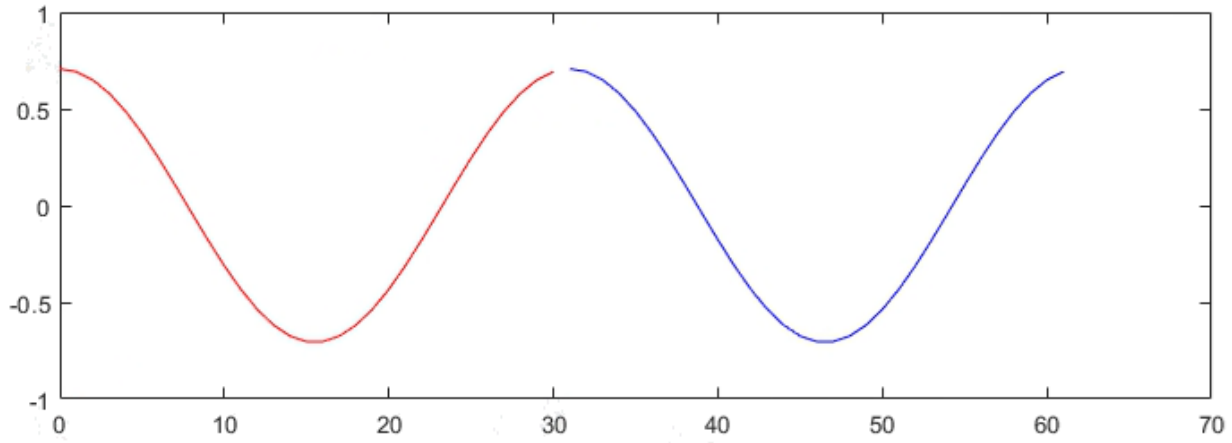
$P_D(l)$

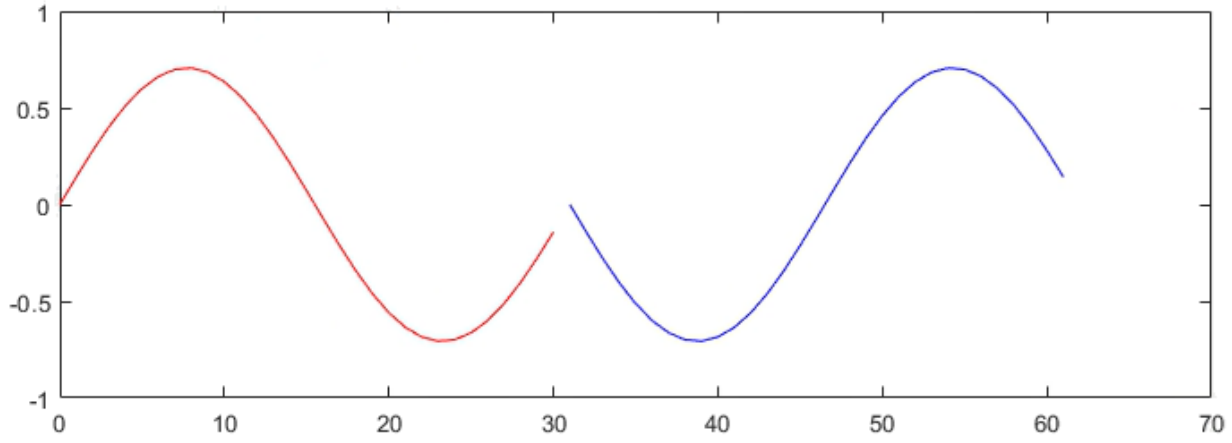


$$\Delta n = \frac{\Delta f \cdot N_{ZC}}{u}$$

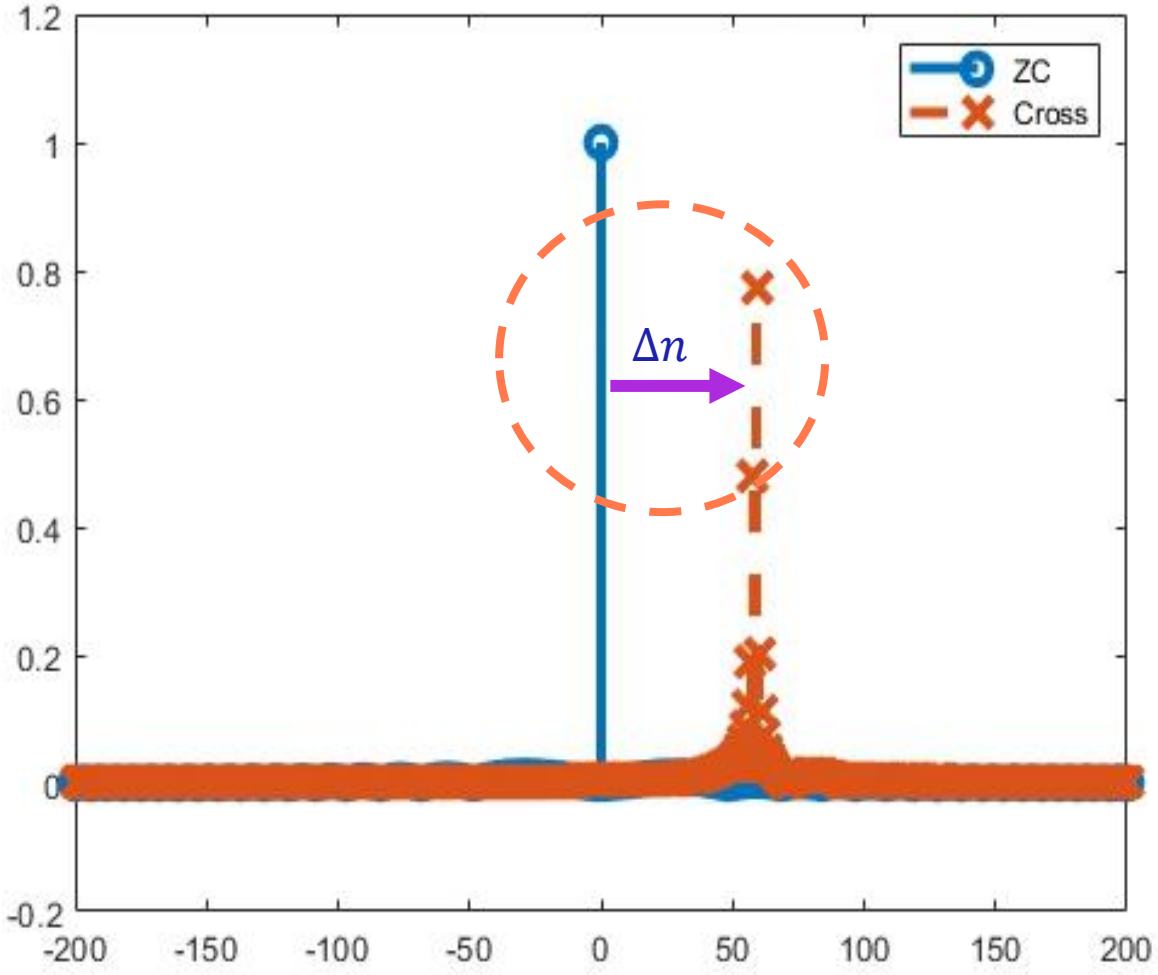
Смещение


ZC
Cross
Δn
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-200
-150
-100
-50
0
50
100
150
200


1
0.5
0
-0.5
-1
0
10
20
30
40
50
60
70

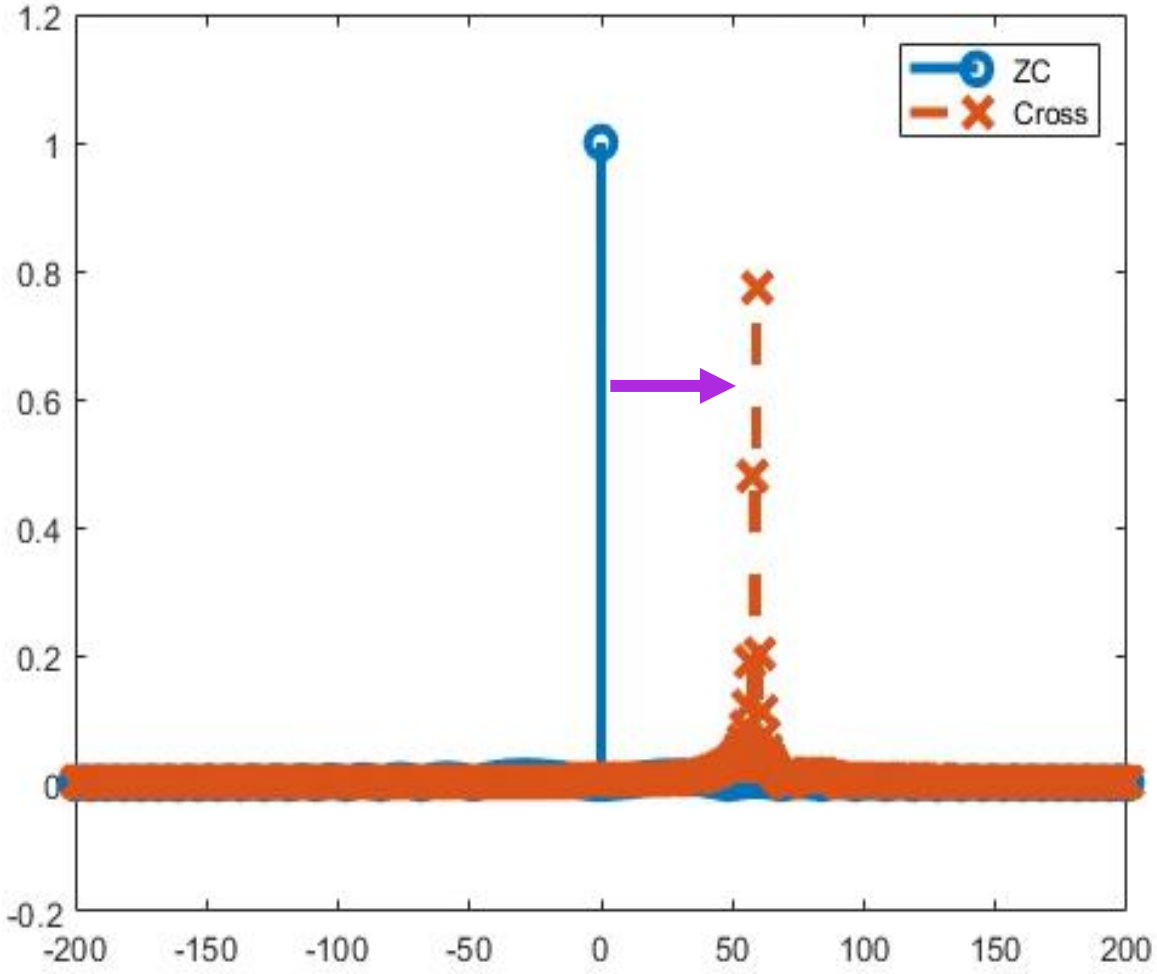

1
0.5
0
-0.5
-1
0
10
20
30
40
50
60
70

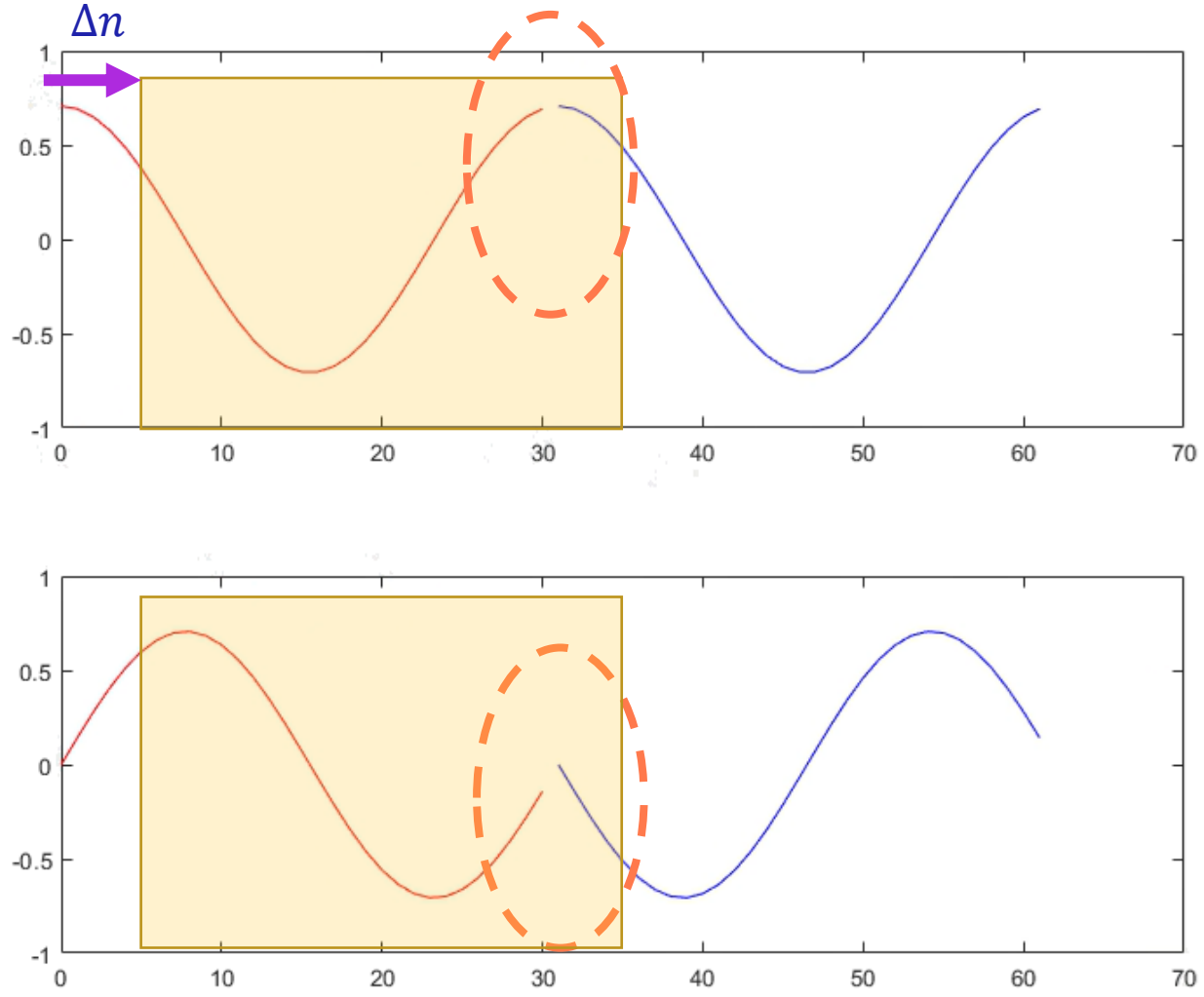
Смещение


ZC
Cross
Δn
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-200
-150
-100
-50
0
50
100
150
200

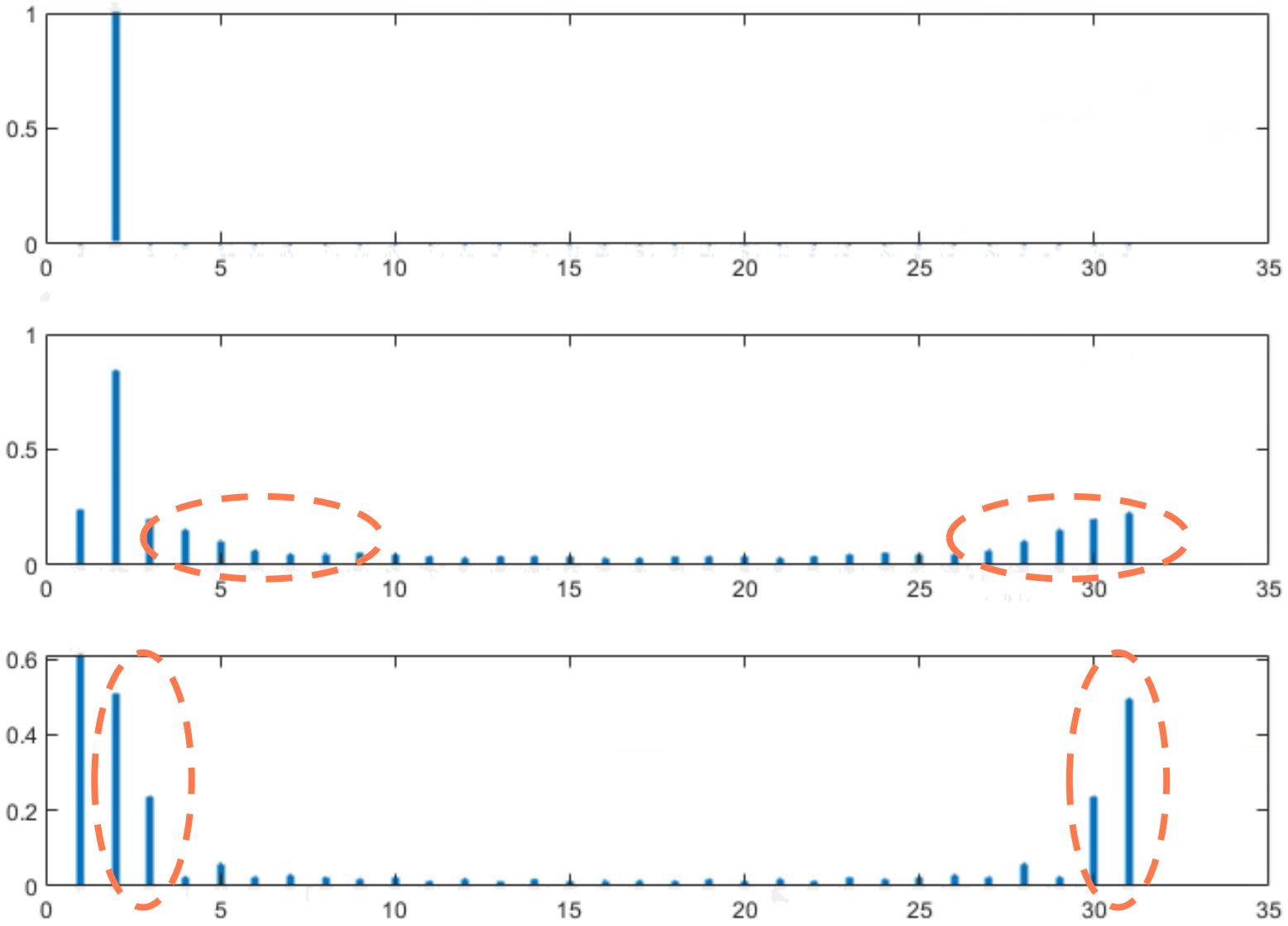

Δn

Смещение – межсимвольная помеха





Межканальная помеха



В нашем примере скорость была

42 км/ч

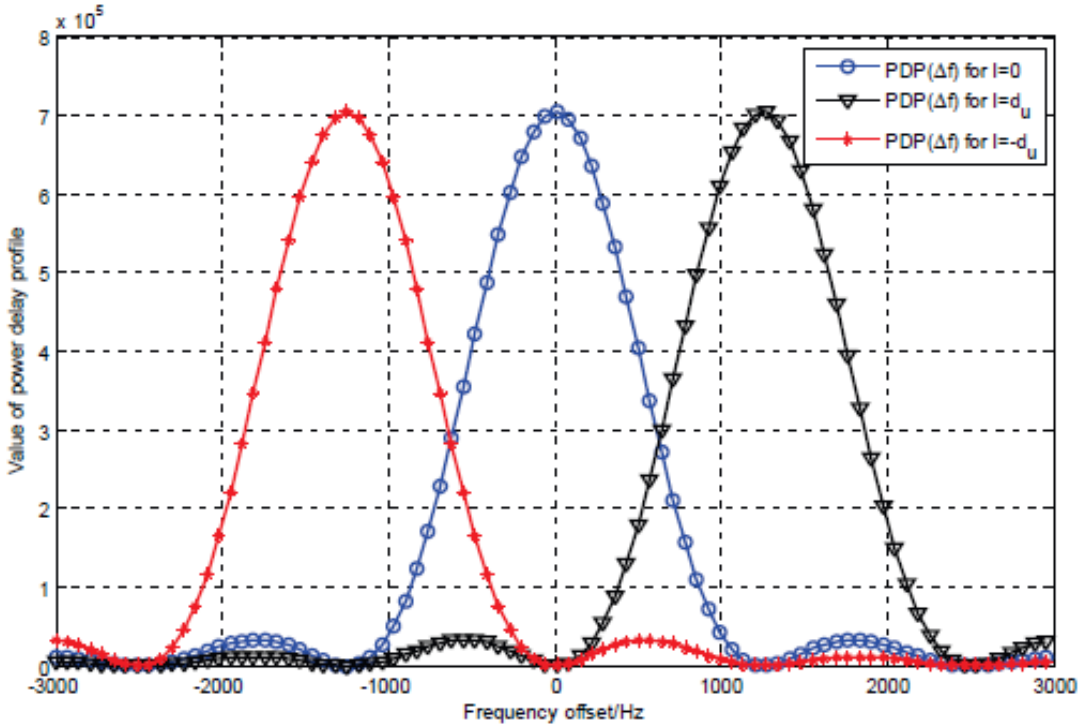
Проблемы

1.Нестабильная работа традиционного метода в различных каналах. Традиционный метод показал низкую стабильность в различных условиях распространения сигнала, что подчеркивает важность дальнейшего совершенствования подходов к адаптации порогов обнаружения.

2.Необходимость тщательного подбора пороговых факторов. Настройка пороговых коэффициентов Ka, Kb и Kc требует проведения множества симуляций, что затрудняет быстрое внедрение и настройку метода в реальных инженерных проектах.

3.Зависимость настроек от количества пользователей. Параметры Kd и Ke зависят от текущего количества активных пользователей случайного доступа, что увеличивает сложность динамической настройки системы.

Улучшенное детектирование



При скорости поезда 200 км/ч
Сдвиг частот равен 1000 Гц для частоты 2.6 ГГц
Если переходить на более высокие частоты связи (3.8 ГГц или 4.6 ГГц, то смещение частот может достигать 3000 Гц!

Tianhao Li,WenboWang, Tao Peng, *An Improved Preamble Detection Method for LTE PRACH in High-Speed Railway Scenario*

Реализовать метод, описанный в статье – разобраться с его особенностями и подумать и возможных путях улучшения

2 Months work

Задача и возможный диплом



Tianhao Li, WenboWang, Tao Peng, An Improved Preamble Detection Method for LTE PRACH in High-Speed Railway Scenario



Реализовать метод, описанный в статье – разобраться с его особенностями и подумать и возможных путях улучшения



10 недель

(30 минут на вопросы еженедельно или 1 час консультации в 2 недели)

Ожидаемый результат:

- **Работающий алгоритм MATLAB/Octave;**
- **Презентация-доклад;**
- **Conference-paper for MIPT on MSU Tikhonov Conference**

BONUS PART

- ❑ **Краткосрочная (летняя) или долгосрочная (дипломирование) стажировка в компании YADRO**
- ❑ **Премия от компании при демонстрации улучшенных результатов в сравнении со статьей**